Komplexe Zahlen

Addieren und Multiplizieren

erzeugen Abbildungen

Datei Nr. [illegible]0018

Stand [illegible] November 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort

Da komplexe Zahlen aus zwei Komponenten bestehen, einem Realteil und einem Imaginärteil, kann man jede von ihnen als Punkt in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.
Jede Berechnung, etwa die Addition oder Multiplikation einer zweiten komplexen Zahl schafft eine neue komplexe Zahl (wenn man nicht gerade 0 addiert oder mit 1 multipliziert). Für den Zahlenpunkt bedeutet das eine Lageänderung, die man in der Mathematik auch als Abbildung bezeichnet.
Dies wird in diesem Text untersucht.

Wenn man eine Addition oder eine Multiplikation für ganze Zahlenmengen durchführen möchte, schreibt man dies gerne als Funktion:

$f(z) = z + (2i - 1)$ addiert zu jeder komplexen Zahl die Zahl a … -1

$f(z) = z \cdot (2i - 1)$ multipliziert komplexe Zahlen mit (2i-1)

Daher kommen Teile dieses Textes bereits in ähnlicher Form im Te… 50015 über komplex… Funktionen vor. Dort gehen die Überlegungen viel weiter … her wu… der vorliegende T… geschrieben. Er konzentriert sich mehr auf die Abbildung… .

Eine interessante Anwendung dieser Abbildungen sind die Z… lenf… im Text 50040.

Inhalt

1 Wiederholung: Polarform komplexer Zahlen

Da jede komplexe Zahl aus <u>zwei</u> Komponenten besteht, kann man sie als Punkt in der sogenannten Gaußschen Zahlenebene darstellen:

Die Zeichnung zeigt 8 Punkte als Bilder von 8 komplexen Zahlen:

$z_1 = 2+3i$

$z_2 = -4+i$

$z_3 = -3+2i$

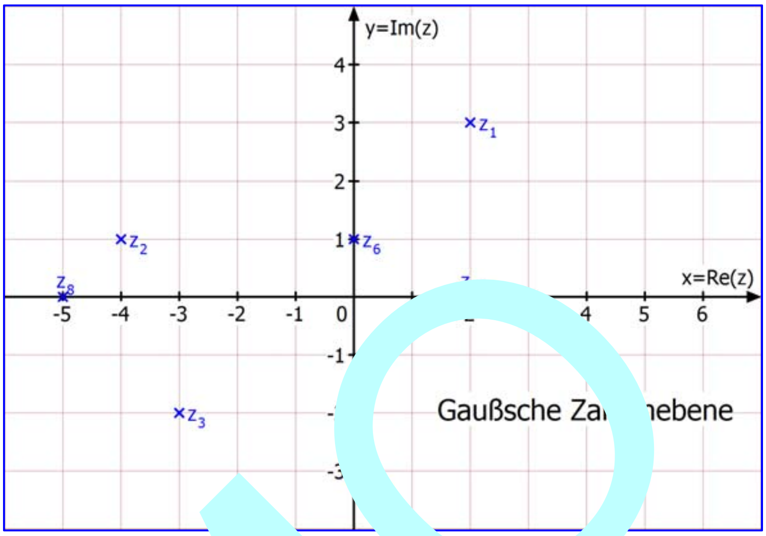
$z_4 = 4-i$

$z_5 = 2+0i$ also $z_5 = 2$

$z_6 = 0+1i$ also $z_6 = i$

$z_7 = 0-3i$ also $z_7 = -3i$

$z_8 = -5+0i$ also $z_8 = -5$

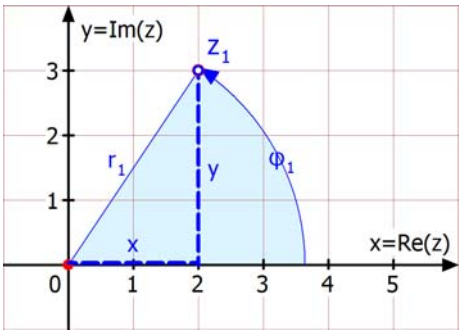


Man sieht an z_5, z_6 und z_7, dass auch dann zwei Komponenten vorhanden sind, wenn ein Teil 0 ist.

Diese 8 Zahlen sind in der Normalform angegeben, d. h. in d For $\boxed{z = x + i \cdot y}$:
Dabei heißt x der Realteil und y der Imagi

Daneben gibt es die **Darstellung in der Pola m.** nn mlich jeden Punkt in dieser Ebene auch durch zwei andere Angabe stlegen. Da elle man r, dass der Punkt eine Ausgangslage auf der reeller chse hat und dann en den Uhrzeigersinn in seine eigentliche Lage gedreht wird. Daz ss man den nradius ke das ist der Abstand des Punktes vom Ursprung, den man als B der ko exen Zahl berechnet, und den Drehwinkel φ (phi),

für den gilt: $0 \le \varphi \le 360^\circ$ ode ogenmaß: 0 $\le 2\pi$.

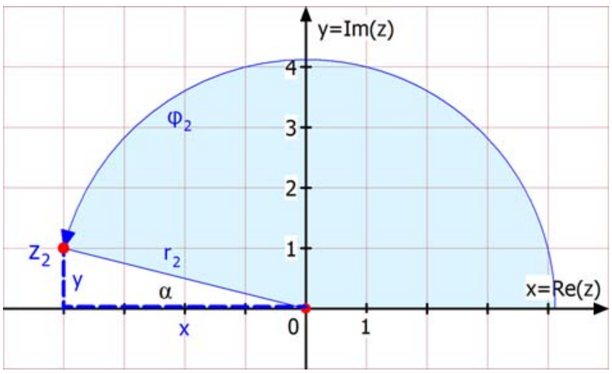


(1) z $+3i$ hat die olarkoo :

$r_1 = |z_1| = \sqrt{2^2+3}$ $\sqrt{13}$

$\varphi = \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow$ $= \arctan\frac{3}{2} \approx 56{,}3^\circ$

(2) $z_2 = -4+i$ h ese Polarkoordinaten:



$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 1^{12}} = \sqrt{17}$

Hilfswinkel α :

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{1}{4} \approx 14^\circ$

$\varphi = 180^\circ - \alpha = 166^\circ$

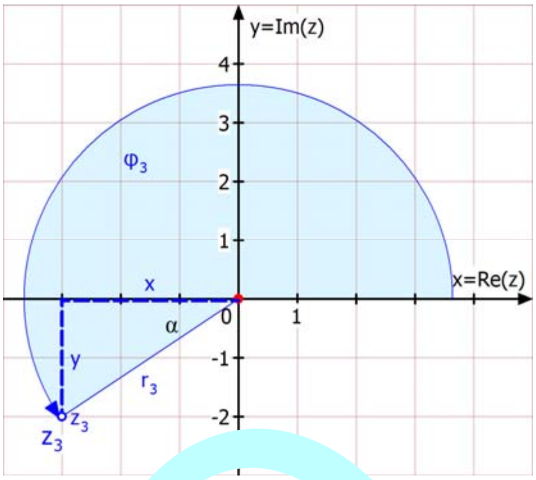
(3) $z_3 = -3-2i$ hat diese Polarkoordinaten:

$$r_3 = |z_3| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

Hilfswinkel α:

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arctan\frac{2}{3} \approx 33{,}7^\circ$$

$$\varphi_3 = 180^\circ + \alpha \approx 213{,}7^\circ$$



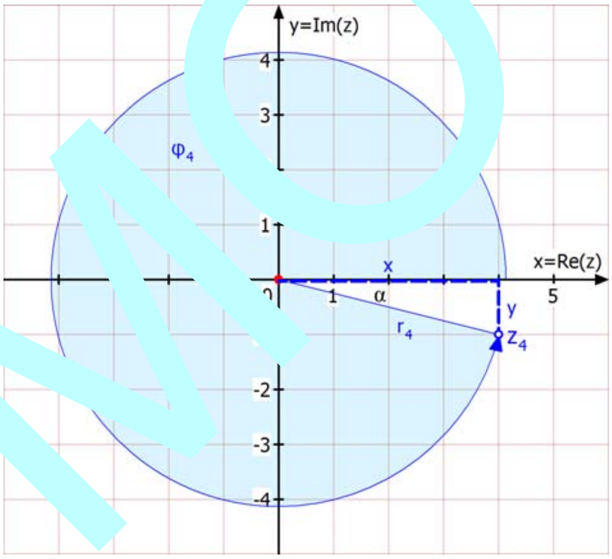
(4) $z_4 = 4-i$ hat diese Polarkoordinaten:

$$r_4 = |z_4| = \sqrt{4^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

Hilfswinkel α:

$$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{4} \quad\Rightarrow\quad \alpha = \arctan\frac{1}{4} \approx 14^\circ$$

$$\varphi_4 = 360^\circ - \alpha \approx 346^\circ$$



Für Punkte auf den Achsen ist es ganz einfach:

$z_5 = 2$ $\quad r_5 = |z_5| = 2$ $\quad$ und $\quad \varphi_5 = 0^\circ$

$z_6 = i$ $\quad r_6 = |z_6| = 1$ $\quad$ und $\quad \varphi_6 = 90^\circ$

$z_7 = -3i$ $\quad r_7 = |z_7| = |-3| = 3$ $\quad$ und $\quad \varphi_7 = 270^\circ$

$z_8 = -5$ $\quad r_8 = |z_8| = |-5| = 5$ $\quad$ und $\quad \varphi_6 = 180^\circ$

Nun üben wir diese Aufgabe:

Wie kann man aus der gegebenen Polarform einer komplexen Zahl die Normalform berechnen?

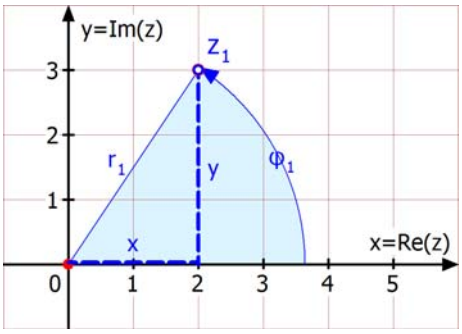
Und dazu verwenden wir die Eulersche Funktion $E(\varphi)$.

(1) Gegeben sei eine komplexe Zahl durch diese Polarkoordinaten:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{13} \quad \text{und} \quad \varphi = 56{,}3^\circ$$

Man hat für z_1 folgende Schreibweise eingeführt:

$$z_1 = \sqrt{13} \cdot E\left(56{,}3^\circ\right)$$



Die Berechnung dieses Ausdrucks gelingt mit der Trigonometrie:

$$\sin\varphi_1 = \frac{y}{r_1} \quad \Rightarrow \quad y = r_1 \cdot \sin\varphi_1$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{x}{r_1} \quad \Rightarrow \quad x = r_1 \cdot \cos\varphi_1$$

Daraus folgt aus $z = x + i \cdot y$: $\quad z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$

Und das kürzt man so ab: $\quad \boxed{E(\varphi) = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi}$

Daher bedeutet $z_1 = \sqrt{13} \cdot E\left(56{,}3^\circ\right)$ das: $\quad z_1 = \sqrt{13} \cdot \left(\cos 56{,}3^\circ + i \cdot \sin 56{,}3^\circ\right)$

Der Taschenrechner liefert dann:

```
√13×cos 56.3
         2.00052
√13×sin 56.3
         2.99965
```

Ergebnis: $\quad z_1 = 2 + 3 \cdot i$

(2) Gegeben ist $z = \sqrt{17} \cdot E\left(166^\circ\right)$

```
√17×cos 166
        -4.0006
√17×sin 166
        0.99746
```

Dann kann man so rechnen:

$$z = \sqrt{17} \cdot \left(\cos 166^\circ + i \cdot \sin 166^\circ\right) = -4 + i$$

(3) Gegeben: $z = \sqrt{13} \cdot E\left(213{,}7^\circ\right) = \sqrt{13} \cdot \left(\cos 213{,}7^\circ + i \cdot \sin 213{,}7^\circ\right)$

```
√13×cos 213.7
        -2.99965
√13×sin 213.7
        -2.00052
```

Ergebnis: $\quad z = -3 - 2 \cdot i$

(4) Gegeben ist $z = \sqrt{17} \cdot E\left(346^\circ\right) = \sqrt{17} \cdot \left(\cos 346^\circ + i \cdot \sin 346^\circ\right) = 4 - i$

(5) $z = 2 \cdot E\left(0^\circ\right) = 2 \cdot \left(\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ\right) = 2 \cdot (1 + 0 \cdot i) = 2$

(6) $z = \frac{1}{2} \cdot E\left(90^\circ\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ\right) = \frac{1}{2} \cdot (0 + i \cdot 1) = \frac{1}{2} i$

usw.

2 Die Addition erzeugt eine Verschiebung.

(1) Wir wollen zu einer beliebigen Zahl z eine Zahl v addieren. Diesen Vorgang kann man auch als Funktion schreiben: $f(z) = z\,\boxed{+v}$.

Als Beispielzahl verwende ich $v = 2 - i$. Dann heißt unsere Funktion $f(z) = z + (\mathbf{2 - i})$

Berechnung einiger Werte:

$f(0) = 2 - i$

$f(2) = 4 - i$

$f(1+i) = 1 + i + 2 - i = 3$

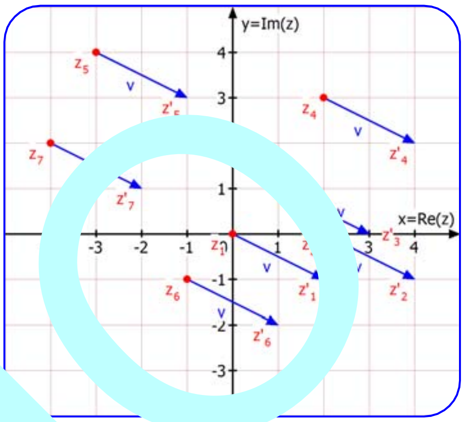
$f(2+3i) = 2 + 3i + 2 - i = 4 + 2i$

$f(-3+4i) = -3 + 4i + 2 - i = -1 + 3i$

$f(-1-i) = -1 - i + 2 - i = 1 - 2i$

$f(-4+2i) = -4 + 2i + 2 - i = -2 + i$

Das Schaubild von f ist dieses Pfeildiagramm.



Ergebnis: f bewirkt eine **Verschiebung** der Gaußschen Ebene auf sich.

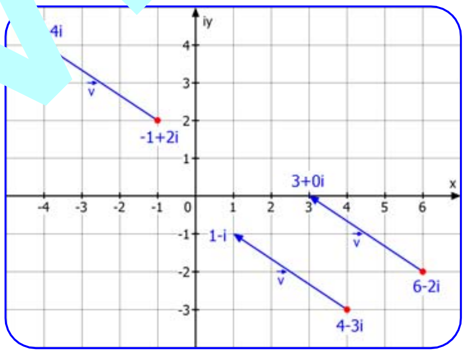
(2) Die Addition $z + (\mathbf{-3 + 2i})$ definiert ei[illegible]nktion $f(z) =$ [illegible] $-3 + 2$[illegible]

$f(-1+2i) = (-1+2i) - 3 + 2i = -4 + 4i$

$f(4-3i) = (4-3i) - 3 + 2i$ [illegible] i

$f(6-2i) = (6-2i) - 3$ [illegible] 3

Auch diese Additions-F[illegible]on erzeugt [illegible]e **Verschiebung**



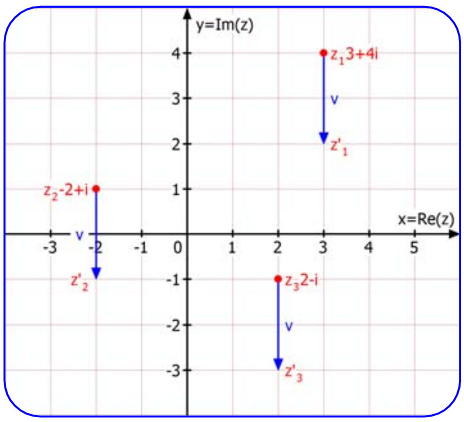
(3) [illegible] man eine Subtraktio[illegible]uch als Addition darstellen kann, stellt auch eine Subtraktion ei[illegible]erschiebung in de[illegible]außschen Zahlebene dar.

Beispiel: $f($[illegible]$- 2i$

$f(3+4i)$ [illegible] $+ 4i - 2i = 3 + 2i$

$f(-2+i) = -2 + i - 2i = -2 - i$

$f(2-i) = 2 - i - 2i = 2 - 3i$



3 Die Multiplikation erzeugt eine Drehung / Streckung / Drehstreckung

Und zwar erzeugt die Multiplikation mit einer

… reellen Zahl eine zentrische Streckung von O aus,

… komplexen Zahl mit Betrag 1 eine Drehung um O,

… komplexen Zahl mit einem Betrag $\neq 1$ und $\neq 0$ eine Drehstreckung.

Multiplikation mit einer reellen Zahl

Beispiel 1: $f(z) = 2z$

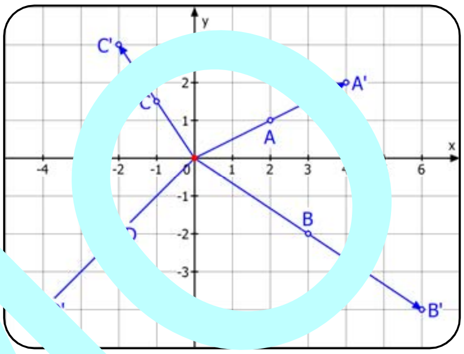
Wertetafel:

$f(2+i) = (2+i)\cdot\boxed{2} = 4+2i$

$f(3-2i) = (3-2i)\cdot\boxed{2} = 6-4i$

$f\left(-1+\frac{3}{2}i\right) = \left(-1+\frac{3}{2}i\right)\cdot\boxed{2} = -2+3i$

$f(-2-2i) = (-2-2i)\cdot\boxed{2} = -4-4i$



Ergebnis: f bewirkt eine **Streckung** der G[illegible]ußschen Ebene [illegible]uf sic[illegible]

Streckzentrum ist der Ursprung. Der Stre[illegible] k = 2.

Ist $0 < a < 1$, dann spric[illegible] man vo[illegible]ner S[illegible]ung.

Ist $a = -1$, dann [illegible] eine Punktspi[illegible]ung am U[illegible]ng vor.

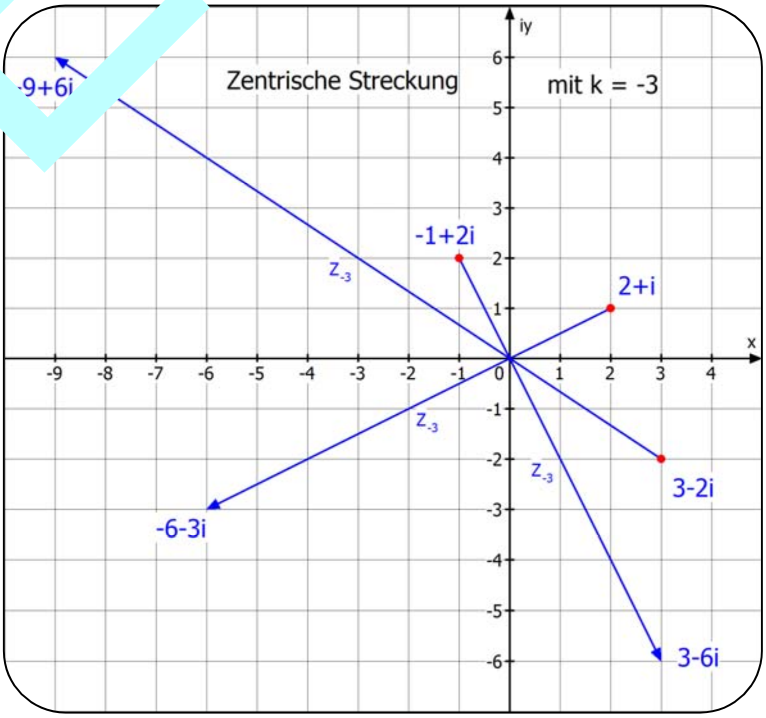
Ist $a < 0$ und $a \neq -1$, d[illegible] wird am Urs[illegible]rung ges[illegible]t und gespiegelt (Beispiel 2).

Beispiel 2: $f(z) = -3z$

$f(-1+2i)$ [illegible] $+2i)\cdot\boxed{-3}$ [illegible] $-6i$

$f(2+$ [illegible] $(2+i)\cdot\boxed{-3} = -6-3i$

$f(3-2i)$ [illegible] $-2i)\cdot\boxed{-3} = -9+6$[illegible]



Multiplikation mit einer komplexen Zahl vom Betrag 1

Beispiel $f(z) = a \cdot z$ **Multiplikation mit** $a = 0{,}6 + 0{,}8 \cdot i$

$a = 0{,}6 + 0{,}8i$ hat den Betrag $|a| = \sqrt{0{,}36 + 0{,}64} = 1$

und das Argument $\alpha = \arctan\left(\frac{0{,}8}{0{,}6}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13^\circ$.

Also ist hat a die Polarform $a = \cos 53{,}13^\circ + i \cdot \sin 53{,}13^\circ = E\left(53{,}13^\circ\right)$

Polartform von z: $z = |z| \cdot E(\varphi)$

Dann folgt für das Produkt: $a \cdot z = \underbrace{1 \cdot E(53{,}13)^\circ}_{a} \cdot \underbrace{|z| \cdot E(\varphi)}_{z} = |z| \cdot$ [illegible] (*)

Denn für die Gaußfunktion E gilt: $\boxed{E(\varphi_1) \cdot E(\varphi_2) = E(\varphi_1 + \varphi_2)}$

(*) besagt, dass das Produkt den gleichen Betrag wie z hat und der Radius des Produkts um $53{,}13^\circ$ weiter gedreht worden ist.

Exponentialgleichung: $f(z) = e^{i \cdot 53{,}13^\circ}$

Drei Beispielprodukte mit $a = 0{,}6 + 0{,}8 \cdot i$

$z_1 = 2 \cdot E\left(30^\circ\right) = 2 \cdot \left(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ\right) \approx 1{,}732$ [illegible] Punkt A

$f(z_1) = 2 \cdot E\left(30^\circ\right) \cdot E\left(53{,}13^\circ\right)$ [illegible] $E\left(30^\circ + 53{,}13^\circ\right)$ [illegible] $E\left(83{,}13^\circ\right) \approx 0{,}239 + i \cdot 1{,}986$ Punkt A'

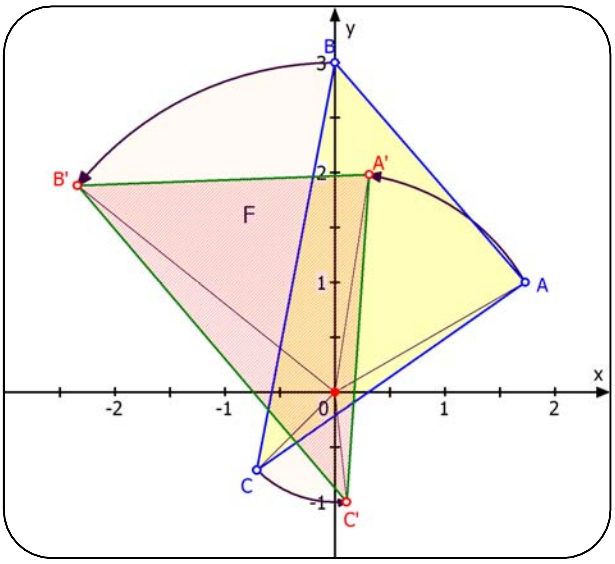
$z_2 = 3 \cdot E(90^\circ) = 3i$ Punkt B

$f(z_2) = 3 \cdot E\left(90^\circ\right) \cdot E\left(53{,}13^\circ\right)$ [illegible] $+ 53{,}13^\circ\big) =$ [illegible] $E\left(143{,}13^\circ\right) \approx -2{,}400 + i \cdot 1{,}800$ Punkt B'

$z_3 = E\left(225^\circ\right)$ [illegible] $i \cdot \sin 225^\circ$ [illegible] $\approx -0{,}7$ [illegible] $0{,}71$ Punkt C

$f(z_3) =$ [illegible] $(225^\circ) \cdot E(53{,}$ [illegible] $= E\big(22$ [illegible] $3{,}13^\circ\big) = E\left(278{,}13^\circ\right) \approx 0{,}141 - i \cdot 0{,}990$ Punkt C'

Jeder zu [illegible] r komplexen Zahl [illegible] ehörende Radius wird bei dies [illegible] nktion (Mul [illegible] kation) um $53{,}13^\circ$ um den Ursprung [illegible] dreh [illegible] abei bleibt der Betrag (Radius) der Zahl gle [illegible]



Ergebnis:

Wird eine komplexe Zahl mit einer zweiten komplexen Zahl mit dem Betrag 1 multipliziert, so bedeutet dies geometrisch eine **Drehung des Zeigers um den Ursprung.**

Beispiel Die Multiplikation mit i stellt eine Drehung um 90° dar.

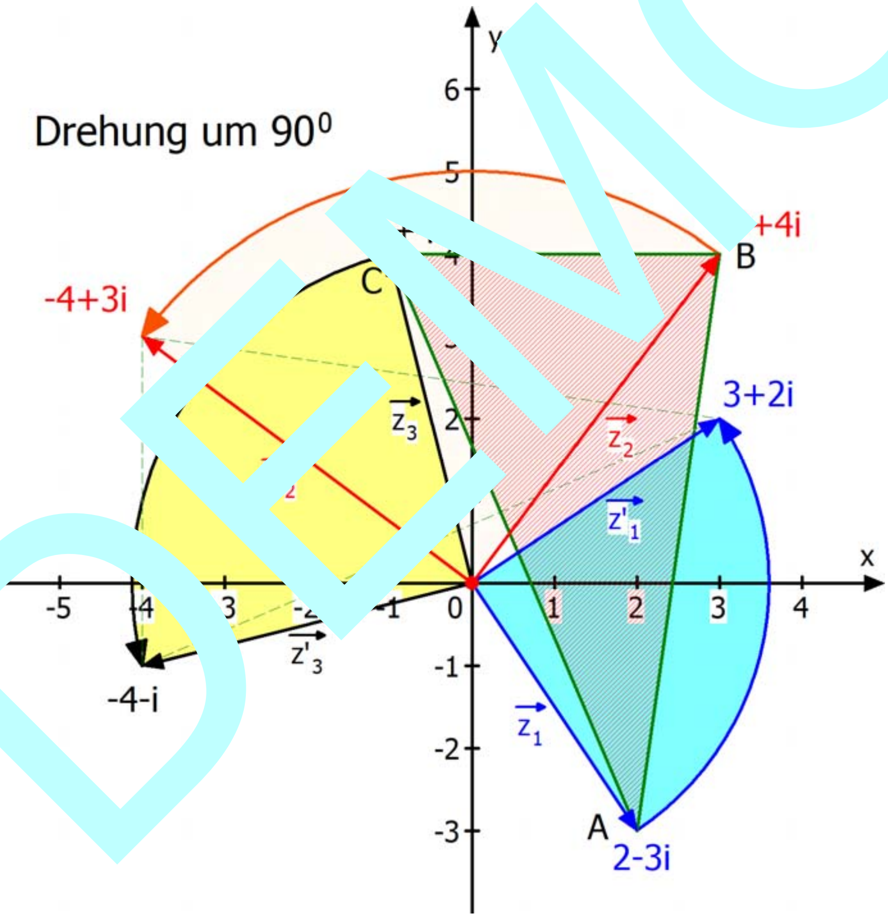
Grund: i hat den Betrag 1 und das Argument 90^{O} : $i = E\left(90^{O}\right)$

z hat den Betrag r und den Argumentwinkel φ $z = r \cdot E(\varphi)$

Das Produkt ist $i \cdot z = \underbrace{1 \cdot E\left(90^{O}\right)}_{i} \cdot \underbrace{|z| \cdot E(\varphi)}_{z} = |z| \cdot E\left(90^{O} + \varphi\right)$

Und das zeigt, dass diese Multiplikation den Betrag (Radius) nicht ändert, aber den Winkel φ um 90^{O} vergrößert.

Aufgabe: Ein Dreieck ABC ist gegeben durch 2 - 3i, 3 + 4i und -1 + 4i.
Drehe dieses Dreieck um 90° und gib die Bildeckpunkte in Form von komplexen Zahlen an:



A': $f(2-3i) = (2-3i) \cdot i = 2i - 3i^2 = 3 + 2i$

B': $f(3+4i) = (3+4i) \cdot i = 3i + 4i^2 = -4 + 3i$

C': $f(-1+4i) = (-1+4i) \cdot i = -i + 4i^2 = -4 - i$

Beispiel $f(z) = a \cdot z$ **Multiplikation mit** $a = \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

Polardarstellung von a:

Betrag: $|a| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

Argument $\alpha^* = \arctan\left|\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\right| = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60^o$

Da aber a in 4. Feld liegt, gilt: $\alpha = 360^0 - \alpha^* = 300^o$

Polarform: $a = 1 \cdot E\left(300^o\right)$

Man kann die Multiplikation mit a einer Funktion f übergeben: $f(z) = \left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \cdot z$

Stellt man z in Polarform dar, folgt: $z = |z| \cdot E(\varphi)$

Polarform von f(z): $f(z) = |z| \cdot E(\varphi) \cdot E\left(300^o\right)$ also: $f(z) = |z| \cdot E\left(\varphi + 300^o\right)$.

Die Anwendung von f erzeugt also in der Gauß-Ebene eine Drehung um den Ursprung um 300^o.

Zahlenbeispiel: **Wir drehen die Strecke $z_1 z_2$ um 300^o.**

Dazu werden z_1 und z_2 mit $\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ multipliziert.

$z_1 = 2 + 3i$: mit $|z_1| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ und $\varphi = \arctan\frac{3}{2} \approx 56{,}3^o$ also $z_1 = \sqrt{13} \cdot E\left(56{,}3^o\right)$

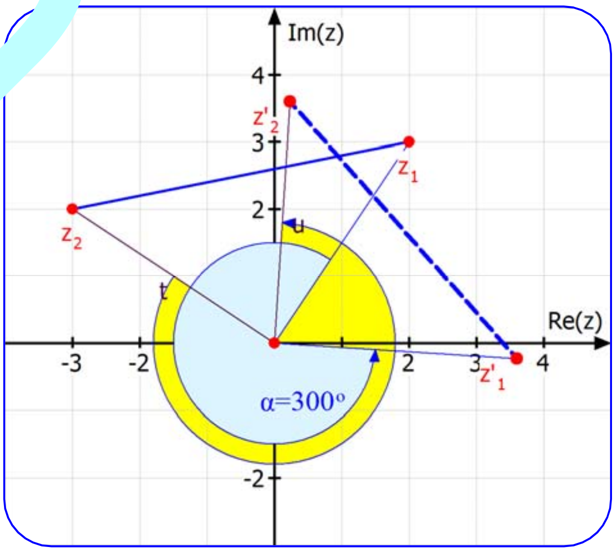
Normalform: $f(z_1) = (2+3i)\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \approx 3{,}6 - 0{,}23 \cdot i$

in Polarform: $f(z_1) = \sqrt{13} \cdot E\left(56{,}3^o\right) \cdot E\left(300^o\right) = \sqrt{13} \cdot E\left(356{,}3^o\right)$

$z_2 = -3 + 2i$ mit $|z_2| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ und $\varphi = 180^o - \arctan\frac{2}{3} = 180^o - 33{,}7^o = 146{,}3^o$

Normalform: $f(z_2) = (-3+2i)\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \approx 0{,}23 + 3{,}6 \cdot i$

in Polarform: $f(z_2) = \sqrt{13} \cdot E\left(146{,}3^o\right) \cdot E\left(300^o\right) = \sqrt{13} \cdot E\left(446{,}3^o\right) = \sqrt{13} \cdot E\left(86{,}3^o\right)$



Beispiel **Multiplikation mit** $a = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

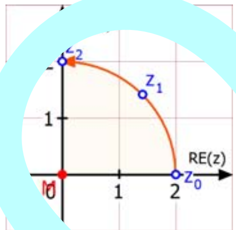
$f(z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) z$

Polardarstellung von a: Betrag: $|a| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$

Argument $\alpha^* = \arctan\left|\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right| = \arctan(1) = 45^o$

$a = 1 \cdot E\left(45^o\right)$

<ins>Beispiel:</ins> Drehe die Zahl $z_o = 2$ zweimal um 45^o.



$z_1 = z_0 \cdot a = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$

$z_2 = z_1 \cdot a = \left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 1 + i + i + i^2 = 2i$

$f(z) = a \cdot z$ Multiplikation mit einer komplexen Zahl a vom Betrag $\neq 1$

Theorie: Gegeben sind z und a in Polarform: $z = |z| \cdot E(\varphi_1)$ und $a = |a| \cdot E(\alpha)$

Für das Produkt folgt dann: $z \cdot a = |z| \cdot E(\varphi) \cdot |a| \cdot E(\alpha)$

und das heißt: $z \cdot a = |z| \cdot |a| \cdot E(\varphi + \alpha)$

Ergebnis: Die Beträge der beiden Faktoren werden multipliziert. Ist a > 1, dann wird $|z \cdot a| > |z|$. Außerdem wird das Argument, also der Winkel gegen die positive x-Achse um α vergrößert. Damit sind die Merkmale einer Drehstreckung erfüllt.

Beispiel 1: $f(z) = \left(\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}\right) \cdot z$

Weiter im Original …

….

Aufgabe:

Die komplexe Funktion $f(z) = (5-12i) \cdot z - 8i$ erzeugt in der Gaußschen Ebene eine Drehstreckung. Bestimme das Drehzentrum und den Streckfaktor sowie das Urbild P des Bildpunktes $P'(-3 \mid 0)$.

Lösung: **im Original !**

Beispiel: $f(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot z+2-i\sqrt{3}$

Zuerst muss k untersucht werden: $k=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)$. Sein Betrag ist $|k|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$.

k liegt im 1. Feld. Daher ist sein Argument: $\alpha=\arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\right)=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=60^{\circ}$..

Somit weiß man, dass die Funktion $g(z)=z\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)$ eine Drehung um O um 60° bewirkt.

Die Funktion f enthält zusätzlich einen Verschiebungssummanden. Daher muss der Fixpunkt bestimmt werden. $f(z)=z$ d. h. $z=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot z+2-i\sqrt{3}$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot z=2-i\sqrt{3} \quad |\ \cdot 2$$

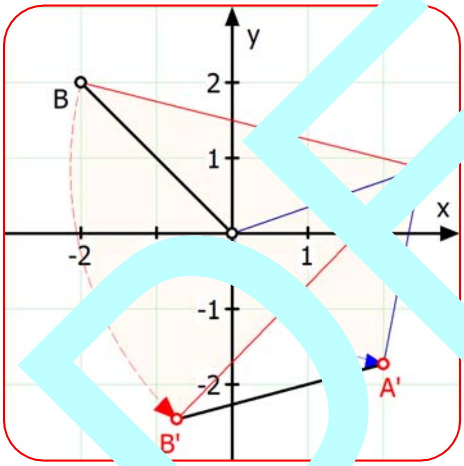
$$\left(1-i\sqrt{3}\right)z=4-i\cdot 2\sqrt{3}$$

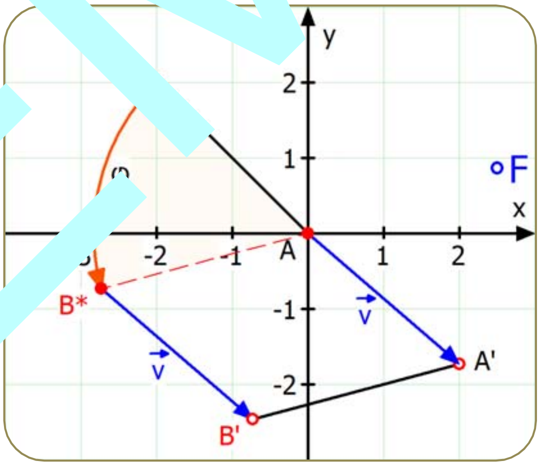
$$z=\frac{\left(4-i\cdot 2\sqrt{3}\right)}{\left(1-i\sqrt{3}\right)}\cdot\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)}=\frac{4+6+i\ldots\sqrt{3}-2\sqrt{3}f)}{\ldots}=\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{\ldots}$$

Erg: f ist eine Drehung um diesen Fixpunkt $F\left(2+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)$ m ...

Zahlenbeispiel: Drehung der Strecke AB mit $A(0)$ und $B(\ldots+2i)$.

$f(0)=2-i\sqrt{3} \Rightarrow A'\left(2-i\sqrt{3}\right)$ $f(-2+2i)\ldots+\frac{\ldots}{2}\ldots)\cdot(-2+\ldots+2-i\sqrt{3}=\ldots \Rightarrow B'(-0{,}73-2{,}46i)$





Links wird die Strecke AB um den Fixpunkt F um 60° gedreht bis $A'B'$.

Rechts wird AB um den Ursprung gedreht bis AB* (A ist dabei Fixpunkt), dann wird sie um $v=2-i\sqrt{3}$ verschoben. Dazu wird der Fixpunkt F nicht benötigt. Das Ergebnis ist dasselbe!

Beispiel: $f(z) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot z + 2 - i\sqrt{3}$

(aus dem Text 50017 – Komplexe Zahlenfolgen) Beispiel 6 Seite 19)

Zuerst muss k untersucht werden: $k = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)$. Sein Betrag ist $|k| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$.

k liegt im 1. Feld. Daher ist sein Argument: $\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = 60^\circ$..

Somit weiß man, dass die Funktion $g(z) = z\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)$ eine Drehung um O um 60° bewirkt.

Die Funktion f enthält zusätzlich einen Verschiebungssummanden. Daher muss der Fixpunkt bestimmt werden. $f(z) = z$ -

$$z = z\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right) + \boxed{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot i}.$$

$$z - z\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot i$$

$$z\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right) = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot i \qquad |\cdot 2$$

$$z\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right) = \left(1+\sqrt{3}\right)+\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i$$

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}\cdot i} - \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i}{1-\sqrt{3}\cdot i}$$

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}\cdot i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{\left(1+\sqrt{3}i\right)} - \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i}{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{\left(1+\sqrt{3}i\right)}$$

$$z = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{1-\sqrt{3}\cdot i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{\left(1+\sqrt{3}i\right)} - \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\cdot i}{\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{\left(1+\sqrt{3}i\right)} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}i+3i}{1+3} - \frac{i-\sqrt{3}i-\sqrt{3}+3}{1+3}$$

$$z = \frac{2+2\sqrt{3}-\sqrt{3}i+2i}{4}$$ Fixpunkt!

Nun erzeugen wird eine Folge, indem wir mit z_1=1 beginnen und definieren $z_{n+1} = f(z_n)$.

Startzahl ist $z_1 = 1$.

Folgezahl $z_2 = f(z_1) = f(1) = 1\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot i = 1+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i = \frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

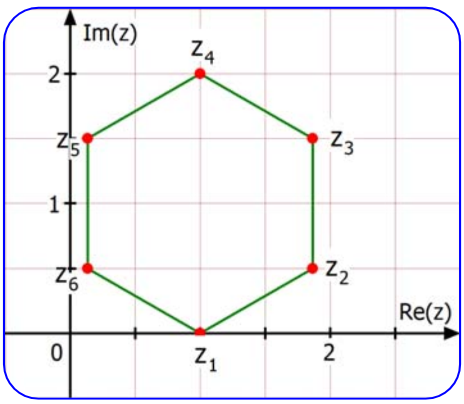
Folgezahl $z_3 = f(z_2) = f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \ldots\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

Folgezahl $z_4 = f(z_3) = f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right) = \ldots = 1+2i$

Folgezahl $z_5 = f(z_4) = f(1+2i) = \ldots = \frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$

Folgezahl $z_6 = f(z_5) = f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right) = \ldots = \frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

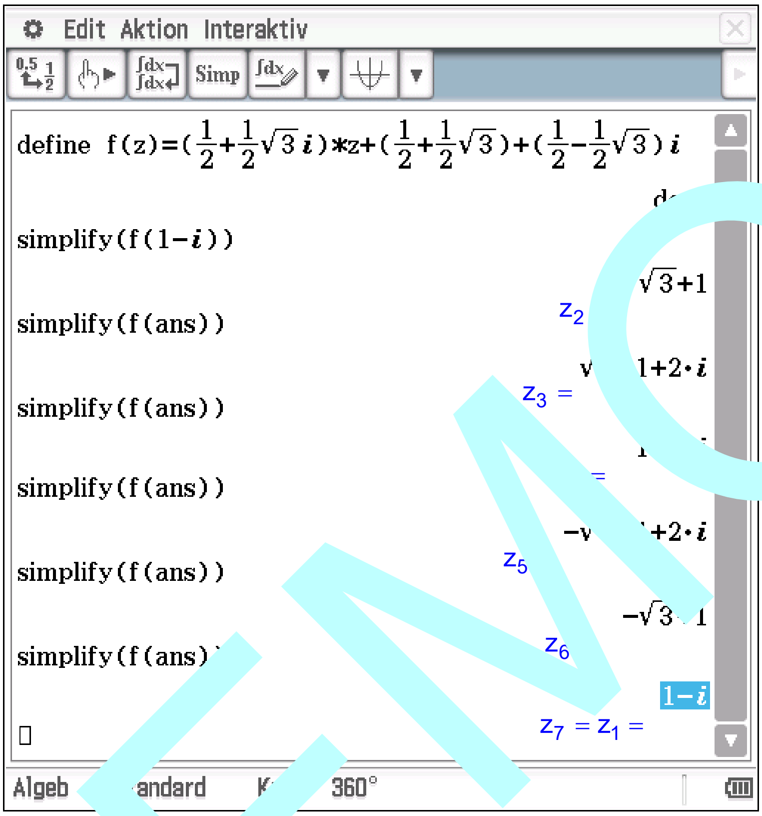
Folgezahl $z_7 = f(z_6) = f\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = \ldots = 1 \; \boxed{= z_1}$

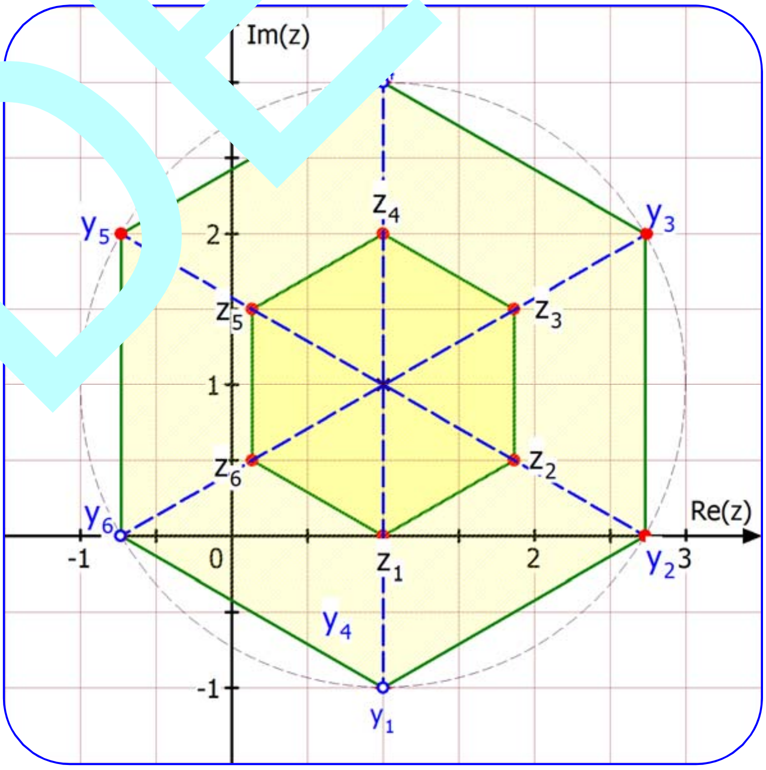


Egal, mit welcher Zahl z_1 man beginnt, man erhält nur 6 verschiedene Glieder der durch die Drehung entstehenden Punktfolge, denn nach 6 Drehungen hat man um 360° gedreht, d.h. $z_7 = z_1$! **Daher der Name zyklische Folge.**

Startet man mit einer anderen Zahl, dann erhält man ein anderes Sechseck. Beispiel:

Startzahl sei $z_1 = 1 - 1$ Dazu liefert mein CAS-Rechner diese Zahlenfolge:





Die Zeichnung enthält beide Sechsecke.

Beispiel Untersuche die Abbildung $g(z)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\overline{z}+1-i\cdot\sqrt{3}$.

a) **Fixpunktbed.:** $z=g(z) \Leftrightarrow \quad z=\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\overline{z}+1-i\sqrt{3}$

Ersetzen: $z=x+iy,\ \overline{z}=x-iy: \quad x+iy=\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)(x-iy)+1-i\sqrt{3}$

$$x+iy=\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot ix-\tfrac{1}{2}iy+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y\right)+1-i\sqrt{3}$$

$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y-1+\tfrac{3}{2}iy-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot ix+i\sqrt{3}=0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y-1\right)+\left(\tfrac{3}{2}y-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}\right)\cdot i=0$$

Koeffizientenvergleich: $\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{3}y-1=0 \quad \ldots\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot x+\frac{3}{2}y+\ldots \quad (2)\end{array}\right\}$

Multiplikation der 1. Gleichung mit $-\sqrt{3}$: $\underbrace{(-\sqrt{3})\cdot\tfrac{1}{2}x}_{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,x}+\underbrace{(-\ldots)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y\right)}_{\ldots 3y}+\underbrace{(-\sqrt{3})\cdot(\ldots}_{\sqrt{3}}=0$

Man erkennt, dass die zweite Gleichung ein Vielfa[illegible]er erste[illegible] (bzw. umge[illegible]t).
Also stellt Gleichung (1) eine Fixpunktgerade dar:

$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y-1=0 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\sqrt{3}y=\tfrac{1}{2}x-1 \Leftrightarrow \boxed{y=\tfrac{1}{\ldots}x-\tfrac{\ldots}{\sqrt{3}}}$$

b) **Darstellung durch eine Matrixgleich[illegible]:**

$$w=\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\ldots\right)\cdot\overline{z}+1-\ldots$$

$$(u+\ldots)=\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\ldots}\right)\cdot(x-iy)+1-i\cdot\sqrt{3}$$

$$\ldots+iv=\left(\tfrac{1}{2}-i\cdot\tfrac{1}{\ldots}\sqrt{3}\right)(x-iy)+1-i\sqrt{3}$$

$$u+iv=\tfrac{1}{\ldots}\ldots\tfrac{}{2}\sqrt{3}\,ix-\tfrac{1}{2}iy-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y+1-i\sqrt{3}$$

$$\ldots\left(\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}y+1\right)+\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}x-\tfrac{1}{2}y-\sqrt{3}\right)\cdot i$$

K[illegible]zientenvergleich: $\left\{\begin{array}{l}u=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sqrt{3}y-1\\ v=-\frac{1}{2}\sqrt{3}x-\frac{1}{2}y-\sqrt{3}\end{array}\right\}$

Abbildung[illegible]chu[illegible] Matrixform: $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$

Diese Matrix A gehört zu einer ***Geradenspiegelung***, denn ihre Spaltenvektoren haben den Betrag 1:

$$|\vec{a}|=\left|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}}=1,\quad |\vec{b}|=\left|\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right|=\sqrt{\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{4}}=1$$

und sind orthogonal: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt{3}=0$.

Ihre Determinante ist 1 $\quad\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-1$

Beispiel $f(z) = -2i\bar{z} + 1 + i$

....